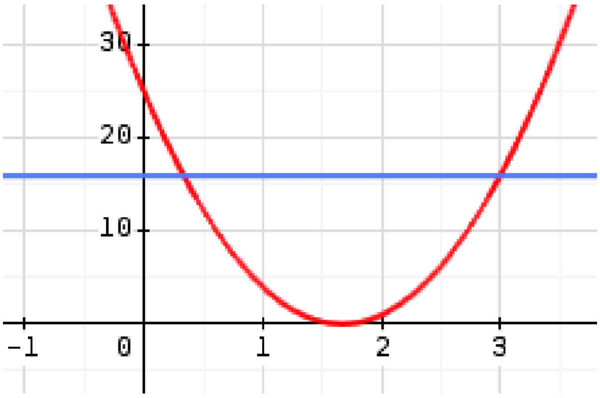
Corrigé

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-3x+5)^2$.

On s'intéresse à l'équation $f(x) = 16$ et à l'inéquation $f(x) \geq 16$.

1) Méthode graphique.

   a) Représentation graphique de la fonction f et de la droite horizontale d'équation $y = 16$.



   b) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 16$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction f et de la droite horizontale d'équation $y = 16$.

   c) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 16$ sont $s \sim 0.3$ et 3.

   d) Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 16$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de la fonction f qui sont au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = 16$.

   e) Graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 16$ est $]-\infty; s] \cup [3.+\infty[$ avec $s \sim 0.3$.

2) Méthode calculatoire

   a) Montrons que l'équation $f(x) = 16$ est équivalente à l'équation $(-3x+1) \times (-x+3) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 16 &\Leftrightarrow (-3x+5)^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow (-3x+5)^2 - 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow (-3x+5)^2 - 4^2 = 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow (-3x+5-4)\times(-3x+5+4)=0 \quad$ avec $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$\Leftrightarrow (-3x+1)\times(-3x+9)=0$

b) Déterminons l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=16$.

$$\begin{aligned}
f(x)=16 &\Leftrightarrow (-3x+1)\times(-3x+9)=0\\
&\Leftrightarrow -3x+1=0 \text{ ou } -3x+9=0\\
&\Leftrightarrow -3x=-1 \text{ ou } -3x=-9\\
&\Leftrightarrow 3x=1 \text{ ou } 3x=9\\
&\Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \text{ ou } x=\frac{9}{3}\\
&\Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \text{ ou } x=3
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=16$ est $\left\{\frac{1}{3};3\right\}$.

c) Montrons que l'inéquation $f(x)\geq 16$ est équivalente à l'inéquation $(-3x+1)\times(-3x+9)\geq 0$.

$$\begin{aligned}
f(x)\geq 16 &\Leftrightarrow (-3x+5)^2\geq 16\\
&\Leftrightarrow (-3x+5)^2-16\geq 0\\
&\Leftrightarrow (-3x+5)^2-4^2\geq 0\\
&\Leftrightarrow (-3x+5-4)\times(-3x+5+4)\geq 0 \quad \text{avec } a^2-b^2=(a-b)(a+b)\\
&\Leftrightarrow (-3x+1)\times(-3x+9)\geq 0
\end{aligned}$$

d) Dressons le tableau de signes de $(-3x+1)\times(-3x+9)$.

On a $-3x+1\geq 0$ lorsque $-3x\geq -1$ soit $x\leq \frac{-1}{-3}$, soit $x\leq\frac{1}{3}$.

On a $-3x+9\geq 0$ lorsque $-3x\geq -9$ soit $x\leq \frac{-9}{-3}$, soit $x\leq 3$.

Par suite

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$-3x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$-3x+9$		$+$		$+$	0	$-$	
$(-3x+1)\times(-3x+9)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

e) Déterminons l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 16$.

D'après le tableau de signes précédent

$$\begin{aligned} f(x) \geq 16 &\Leftrightarrow (-3x+1)\times(-3x+9) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } x \geq 3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 16$ est $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [3. +\infty[$.